# INSTITUT DE STATISTIQUE de l'Université Pierre et Marie Curie

## Concours d'entrée
**6 et 7 juin 1996**

### Epreuve de Mathématique III
*Durée 3 heures*

**Le sujet comporte 3 parties qui peuvent être traitées de manière indépendante.**

**Notations.** Dans tout le sujet, $T$ désigne une fonction réelle de la variable réelle qui est continue, et, pour $y$ dans $\mathbb{R}$, $(x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite à valeurs réelles définies par :

$$x_0(y) = y \quad \text{et} \quad x_{n+1} = T(x_n) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}\,.$$

On rappelle que $x$ élément de $\mathbb{R}$ est un point fixe de $T$ si il vérifie $T(x) = x$, et on définit une extraction comme étant une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

## Première partie

1) Soit $x$ et $y$ appartenant à $\mathbb{R}$ et vérifiant $\lim_{n\to\infty} x_n(y) = x$. Montrer que $x$ est un point fixe de $T$.

2) Soit $a$ et $b$ réels vérifiant $a < b$, $k \in ]0,1[$ et tels que :

$$|T(u) - T(v)| \leq k|u - v| \quad \text{pour} \quad (u,v) \in [a,b]^2\,. \tag{1}$$

   a) Montrer que dans $[a,b]$ $T$ ne peut avoir plus d'un point fixe et donner un exemple de fonction $T$ qui vérifie la condition **(1)** et n'a pas de point fixe dans $[a,b]$.

   b) Supposons qu'il existe $x$ et $y$ appartenant à $[a,b]$ qui vérifient $T(x) = x$ et $x_n(y) \in [a,b]$ pour $n$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n(y) = x$.

3) Soit $a$ et $b$ réels vérifiant $a < b$ et tels que $T([a,b]) \subset [a,b]$. Soit aussi $y$ dans $[a,b]$.

   a) Montrer qu'il existe une extraction de $\varphi$ et $u$ et $v$ dans $[a,b]$ vérifiant :

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)}(y) = u \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)+1}(y) = v\,.$$

   b) Supposons que $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1}(y) - x_n(y)| = 0$. Montrer qu'il existe un point fixe de $T$ dans $[a,b]$.

4) Avec les hypothèses de 3), et si $k \in ]0,1[$ vérifie la condition :

$$|T(u) - T(v)| \leq k|u - v| \quad \text{pour} \quad (u,v) \in [a,b]^2 .$$

a) Montrer qu'il existe dans $[a,b]$ un unique point fixe de $T$, noté $x^*$.

b) Montrer que, pour tout $y$ de $[a,b]$, on a $\lim_{n\to\infty} x_n(y) = x^*$.

## Deuxième partie

1) Soit $u$, $v$ et $y$ vérifiant $u \neq v$ et :

$$\lim_{n\to\infty} [\min(|x_n(y) - u|,\ |x_n(y) - v|)] = 0 .$$

Soit alors $\varepsilon \in ]0, |u-v|/2[$, et $\eta \in ]0,\varepsilon]$ vérifiant :

$$|T(x) - T(u)| \leq \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - u| \leq \eta ,$$

et

$$|T(x) - T(v)| \leq \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - v| \leq \eta .$$

Justifier l'existence de $\eta$.

a) Supposons qu'il existe une extraction $\varphi$ vérifiant :

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)}(y) = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)+1}(y) = u .$$

Montrer que $T(u) = u$ et que, pour $n$ assez grand, on a $|x_{\varphi(n)+j}(y) - u| \leq \eta$ pour $j \in \mathbb{N}$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} x_n(y) = u$.

b) Supposons qu'il existe une extraction $\varphi$ vérifiant :

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)}(y) = u,\ \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)+1}(y) = v \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)+2}(y) = u .$$

Montrer que $T(u) = v$ et $T(v) = u$, et que, pour $n$ assez grand, on a $|x_{\varphi(n)+2j}(y) - u| \leq \eta$ et $|x_{\varphi(n)+2j+1}(y) - v| \leq \eta$ pour $j \in \mathbb{N}$. En déduire qu'il existe $i \in \{0,1\}$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} x_{2n+i}(y) = u$ et $\lim_{n\to\infty} x_{2n+i+1}(y) = v$.

c) Etudier tous les cas possibles pour le comportement limite de la suite $(x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Soit $T(x) = x^{1/3}$ pour $x \geq 0$ et $T(x) = -|x|^{1/3}$ pour $x < 0$.

a) Tracer la fonction $T$ et le comportement des principales suites $(x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $y \in \mathbb{R}$.

b) Etudier le comportement limite des suites $(x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ pour chacun des trois cas : $0 \leq y < 1$, $y = 1$ et $y > 1$.

3) Soit $T(x) = -x^{1/3}$ pour $x \geq 0$ et $T(x) = |x|^{1/3}$ pour $x < 0$.

a) Tracer la fonction $T$ et le comportement des principales suites $(x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $y \in \mathbb{R}$.

b) Etudier le comportement limite des suites $(x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ pour chacun des trois cas : $0 \leq y < 1$, $y = 1$ et $y > 1$.

## Troisième partie

Nous supposons ici que la fonction $T$ est définie par $T(x) = x + x^2$ pour $x$ dans $\mathbb{R}$. Rappelons que deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $]0,\infty[$ sont dites équivalentes si $a_n = b_n(1+\alpha_n)$ pour $n$ dans $\mathbb{N}$, avec $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. Dans cette partie, ln désigne la fonction logarithme népérien.

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $]0,\infty[$. Notons $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ pour $n$ dans $\mathbb{N}$.

   a) Supposons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient équivalentes et que $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \infty$. Montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

   b) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite de terme général $1/n$, montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite de terme général $\ln n$.

2) Soit $y \in ]-1,0[$.

   a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n(y) = 0$ et que les suites $(x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{n+1}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

   b) En appliquant le résultat de 1) à la suite définie par $a_n = -1/x_{n+1}(y) + 1/x_n(y)$ pour $n$ dans $\mathbb{N}$, trouver une suite numérique équivalente à la suite $(x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Soit $y \in ]0,\infty[$.

   a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n(y) = \infty$.

   b) Montrer qu'il existe un réel positif $\lambda(y)$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\ln x_n(y) = \lambda(y)$ et $0 < \lambda(y) - 2^{-n}\ln x_n(y) < 2^{-n}/x_n(y)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   c) Trouver une suite numérique (dépendant de $\lambda(y)$) qui est équivalente à la suite $(x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$.

   d) Montrer que $\lambda(y)$ est une fonction croissante de $y$ sur $]0,\infty[$.

   e) Pour $c$ fixé dans $]0,\infty[$, montrer que la suite $(2^{-n}\ln x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda(y)$ pour $y$ dans $[c,\infty[$. En déduire que $\lambda(y)$ est une fonction continue de $y$ sur $]0,\infty[$.